Prof. Dr. Jürgen Herzog **Universität Duisburg-Essen, Campus Essen**

Vorschlag zu einer Formelsammlung für die Klausurprüfung in Grundlagen der Mathematik II für Wirtschaftsinformatik und Systems-Engineering, SS 2007

19. Juni 2007, keine Gewähr für die Fehlerfreiheit der angegebenen Formeln!

In der Klausur sind als Hilfsmittel nur Schreibmaterial und eine **von Ihnen selbst handgeschriebene, maximal 6 Seiten** umfassende Formelsammlung erlaubt. Die folgenden Formeln werden Sie gegebenenfalls in der Prüfung gebrauchen können.

Grundlegende Formeln:
$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n.$
Wurzeln der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0, a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0:$
$x_{1,2} = 1/(2a) \cdot (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}).$
$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1)/k!.$
$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} \cdot x^k.$
$\sum_{k=0}^{k=n} x^k = (x^{n+1} - 1)/(x-1).$
$a^{x+y} = a^x \cdot a^y, \quad (a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x, \quad (a^x)^y = a^{x \cdot y}.$
$\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$ $\qquad \ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x).$
$\sin^2(x) + \cos^2(y) = 1$
$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$ $\qquad \cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$
$\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$ $\qquad \cos^2(x) = \frac{1}{2} \cdot (1 + \cos(2x))$
$\sinh(x) = \frac{1}{2} \cdot (e^x - e^{-x})$ $\qquad \cosh = \frac{1}{2} \cdot (e^x + e^{-x})$
$\tanh(x) = \sinh(x)/\cosh(x)$ $\qquad \coth(x) = \cosh(x)/\sinh(x)$
$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1.$
$\mathrm{Arsinh}(x) = \sinh^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ $\qquad \mathrm{Arcosh}(x) = \cosh^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$
$\mathrm{Artanh}(x) = \tanh^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x})$ $\qquad \mathrm{Arcoth}(x) = \coth^{-1}(x) = \frac{1}{2} \cdot \ln(\frac{x+1}{x-1}).$
$\sin(\pi/6) = \cos(\pi/3) = \frac{1}{2}$ $\qquad \sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
$\sin(\pi/3) = \cos(\pi/6) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Differentiationsregeln und -formeln:

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$c \cdot u(x)$	$c \cdot u'(x)$	$u(x) + v(x)$	$u'(x) + v'(x)$
$u(x) \cdot v(x)$	$u(x)' \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$	$u(x)/v(x)$	$\frac{u(x)' \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v(x)^2}$
$u(v(x))$	$u'(v(x)) \cdot v'(x)$	$c \in \mathbb{R}$	0
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	e^x	e^x
a^x	$\ln(a)a^x$	$\ln(x)$	$1/x$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$1/\cos^2(x)$	$\cot(x)$	$-1/\sin^2(x)$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$	$\cosh(x)$	$\sinh(x)$
$\tanh(x)$	$1/\cosh^2(x)$	$\coth(x)$	$-1/\sinh^2(x)$
$\arcsin(x)$	$1/\sqrt{1-x^2}$	$\arccos(x)$	$-1/\sqrt{1-x^2}$
$\arctan(x)$	$1/(1+x^2)$	$\mathrm{arccot}(x)$	$-1/(1-x^2)$
$\mathrm{Arsinh}(x)$	$1/\sqrt{x^2+1}$	$\mathrm{Arcosh}(x)$	$\pm 1/\sqrt{x^2-1}$
$\mathrm{Artanh}(x)$	$1/(1-x^2)$	$\mathrm{Arcoth}(x)$	$1/(1-x^2)$

Konvergenz von Reihen:
a) Existieren Zahlen $q \in (0,1)$ und $N \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1$ für alle $n \geq N$, dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent. Gilt dagegen $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ für unendlich viele n, so ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent.

b) Ist $a_n \neq 0$ und existieren Zahlen $q \in (0,1)$ und $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_{n+1}/a_n| \leq q < 1$ für alle $n \geq N$, dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent. Existiert dagegen ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_{n+1}/a_n| \geq 1$ für alle $n \geq N$, so ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent.
c) Die Funktion $f(x) \geq 0$ sei für $x \geq p, p \in \mathbb{Z}$ monoton fallend. Dann gilt:
$\sum_{n=p+1}^{\infty} f(n) \leq \int_p^{\infty} f(x)\ \mathrm{dx} \leq \sum_{n=p}^{\infty} f(n)$.

Potenzreihen:
$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}.$

$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$

$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$

$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad |x| < 1.$

$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| < 1.$

$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1.$

$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \quad \binom{\alpha}{n} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)/n!, \quad |x| < 1.$

Übergang von Polarkoordinaten zu kartesischen Koordinaten und umgekehrt:
$x = r(\varphi)\cos(\varphi), \quad y = r(\varphi)\sin(\varphi), \quad r = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \varphi = \arctan(y/x).$

Unbestimmte Integrale (Konstante weggelassen!)
$\int fg'\ \mathrm{dx} = fg - \int f'g\ \mathrm{dx}.$

$\int F(f(x))f'(x)\ \mathrm{dx} = \int F(u)\ \mathrm{du}, \quad u = f(x).$

$\int f'(x)/f(x)\ \mathrm{dx} = \ln(|f(x)|).$

$\int 1/(1+x^2)^n\ \mathrm{dx} = \frac{x}{(2n-2)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \int\ \mathrm{dx}/(1+x^2)^{n-1}, n > 1.$

$\int \sqrt{1-x^2}\ \mathrm{dx} = \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin(x).$

$\int\ \mathrm{dx}/\sqrt{x^2 \pm 1} = \ln(|x + \sqrt{x^2 \pm 1}|).$

$\int \sqrt{x^2 \pm 1}\ \mathrm{dx} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm 1} \pm \ln(|x + \sqrt{x^2 \pm 1}|).$

$\int \sin^n(x)\ \mathrm{dx} = -\frac{1}{n}\sin^{n-1}(x)\cos(x) + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-1}(x)\ \mathrm{dx}.$

$\int \tan(x)\ \mathrm{dx} = -\ln(|\cos(x)|).$

$a \neq 0, \quad \Delta := b^2 - 4ac:$

$$\int 1/(ax^2+bx+c)\ \mathrm{dx} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{-\Delta}}\arctan(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}) & \Delta < 0 \\ \frac{-2}{2ax+b} \qquad\qquad \text{für} & \Delta = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\ln(\frac{2ax+b-\sqrt{\Delta}}{2ax+b+\sqrt{\Delta}}) & \Delta > 0 \end{cases}$$

Partialbruchzerlegung:
Es sei $f(x)/g(x)$ der Quotient zweier Polynome mit Grad$(f) <$ Grad(g) und sei $g(x)$ in ein Produkt von Faktoren des Typs $(x-\alpha)^m$ und $((x-\beta)^2+\gamma^2)^n$ mit paarweise verschiedenen Polynomen $p(x) := x - \alpha$ und paarweise verschiedenen $q(x) := (x-\beta)^2 + \gamma^2$ vollständig zerlegt. Dann lässt sich $f(x)/g(x)$ zerlegen in:
$f(x)/g(x) = c_1/p + c_2/p^2 + \ldots + c_m/p^m + \ldots + (d_1 + e_1 x)/q + (d_2 + e_2 x)/q^2 + \ldots + (d_n + e_n x)/q^n + \ldots$.
Die Koeffizienten $c_1, \ldots, c_m, \ldots, d_1, e_1, \ldots, d_n, e_n, \ldots$ erhält man als eindeutige Lösung eines linearen Gleichungssystems, das aus dem Koeffizientenvergleich des Zählerpolynoms $f(x)$ mit dem Zählerpolynom der rechten Seite entsteht.

Bogenlänge einer Kurve:
Kurve gegeben in Parameterdarstellung, $(x(t), y(t), \cdots) \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [a, b] \subseteq \mathbb{R}:$
Länge der Kurve von a bis b: $\int_a^b \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \cdots}$ dx.

Ebene Kurve in Polarkoordinaten, $(r(\varphi), \varphi), \quad \varphi \in [\alpha, \beta] \subseteq \mathbb{R}:$
Länge der Kurve von α bis β: $\int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{r}^2(\varphi) + r^2(\varphi)}\ \mathrm{d}\varphi$.

Ebene Kurve in kartesischen Koordinaten, $(x, y(x)), \quad x \in [a, b] \subseteq \mathbb{R}:$
Länge der Kurve von a bis b: $\int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)}$ dx.

Fläche des von einem in Polarkoordinaten gegebenen Kurvenstück und den Radien mit den Winkeln α und β begrenzten Sektors:
Sektorfläche= $\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)\mathrm{d}\varphi$.

Volumen eines durch Rotation eines Kurvenstücks um die x-Achse erzeugten Körpers:
Das Kurvenstück sei in kartesischen Koordinaten durch $(x, y(x)), x \in [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ gegeben:
Volumen= $\pi \int_a^b y^2(x)$ dx.

Oberfläche eines ebensolchen Körpers:
Oberfläche= $2\pi \int_a^b y(x)\sqrt{1 + y'^2(x)}$ dx.

Oberfläche des Körpers bei rotiertem Kurvenstück in Polarkoordinaten:
Oberfläche= $2\pi \int_\alpha^\beta r(\varphi)\sin(\varphi)\sqrt{\dot{r}^2(\varphi) + r^2(\varphi)}\ \mathrm{d}\varphi$.

Oberfläche des Körpers bei rotiertem Kurvenstück in Parameterdarstellung:
Oberfläche= $2\pi \int_a^b y(t)\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\ \mathrm{d}t$.

Funktionen mehrerer Variablen:
grad$f = \nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \cdots)$

Sei $c(t) = (x(t), y(t), \cdots), \quad t \in (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ eine differenzierbare Kurve im $\mathbb{R}^n$ und f eine differenzierbare Funktion von n Variablen. Dann ist die Ableitung der Funktion $f(c(t))$ nach t an einer Stelle $p \in (a, b)$ gegeben durch $<\nabla f(c(p)), \dot{c}(p)>= \frac{\partial f}{\partial x}(c(p)) \cdot \dot{x}(p) + \frac{\partial f}{\partial y}(c(p)) \cdot \dot{y}(p) + \cdots$.

Hurwitz Kriterium für lokale Extrema bzw. Sattelpunkte einer Funktion von n Variablen:
Die Funktion f sei an der Stelle P stationär und hat dort ein lokales Minimum, wenn für ihre $n \times n$ Hesse-Matrix $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ gilt: $\det((a_{ij})_{1 \le i,j \le k}) > 0$ für alle $k = 1, \ldots, n$ sind.
An der Stelle P befindet sich ein lokales Maximum, wenn für alle $k = 1, \ldots, n$ gilt: $(-1)^k \det((a_{ij})_{1 \le i,j \le k}) > 0$
Ist $\det((a_{ij})_{1 \le i,j \le k}) < 0$ für ein **gerades** k oder existieren $k \ne l$, **beide ungerade**, mit $\det((a_{ij})_{1 \le i,j \le k}) > 0$ sowie $\det((a_{ij})_{1 \le i,j \le l}) < 0$, so hat f in P einen Sattelpunkt.
In den verbleibenden Fällen ist nur mit der Hesse-Matrix keine Aussage über den Typ des stationären Punkts P möglich.
Sei $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, dann ist $\det(A) = ad - bc$.
Die Determinante einer 3×3-Matrix $\quad A := \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ ist

$\det(A) = aei + bfg + dhc - gec - dbi - hfa$.